19/5/18

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ~~f(x,y,z) = (2x, y...~~

$f(x,y,z) = (2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)$

$f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (2,-1,-1)$
$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (-1,2,-1)$
$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (-1,-1,2)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: συμμετρικός στην ΟΚΒ Β $\Rightarrow$ ο f: αυτοπροσαρτημένος

$P_A(t) = |A - tI_3| = -t(t-3)^2 \Rightarrow$ ιδιοτιμές του f είναι: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{(απλή)} \\ \lambda_2 = 3 & \text{(διπλή)} \end{cases}$

- $\underline{V(0)}$: $(A - 0 \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & +2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$ Γενική λύση: $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

Άρα: $V(0) = \{k(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 / k \in \mathbb{R}\}$.

$\Rightarrow$ το $\vec{\varepsilon}_1 = (1,1,1)$: βάση του $V(0)$ και τότε το διάνυσμα: $\boxed{\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$

• $V(3)$: $(A - 3I_3)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -x-y-z=0 \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = -x-y$

Γενική λύση: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Τότε: $V(3) = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \in \mathbb{R}^3 / x,y \in \mathbb{R}\}$

Τότε το σύνολο $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$: βάση του $V(3)$ η οποία δεν είναι ορθοκανονική. Με τη διαδικασία Gram-Schmidt, αποκτούμε την ΟΚΒ: $\vec{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\vec{\varepsilon}_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ του $V(3)$

Τότε το σύνολο $e = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$ στην οποία ο πίνακας του f είναι διαγώνιος

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$: συμμετρικός πίνακας $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ ορθογώνιος πίνακας P: ${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta$: διαγώνιος

$P_A(t) = |A - t \cdot I_3| = (t-6)^2 \cdot (t-12) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Ιδιοτιμές του A: $\lambda_1 = 6$ (διπλή)
$\lambda_2 = 12$ (απλή)

• $V_{(12)}$: $(A - 12 I_3) X = 0 \Leftrightarrow$

$V_{(12)} = \left\{ \begin{pmatrix} -z/2 \\ z/2 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

$\xrightarrow[z=2]{\text{για}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: βάση του $V_{(12)} \Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

• $V(6)$: $(A - 6 I_3) X = 0 \Rightarrow V(6) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x-2z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} =$
$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: βάση του $V(6)$ η οποία δεν είναι ορθοκανονική. Με τη διαδικασία Gram-Schmidt αποκτούμε την ΟΚΒ του $V(6)$:

$\boxed{F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, $\boxed{F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Θέτουμε $P = (F_1 \ F_2 \ F_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΕΝΔΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ:

Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E. Υποθέτουμε ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος, δηλαδή: $f = f^*$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο f καλείται μη-αρνητικός:
$f \geq 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E: \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle \geq 0$

Ο f καλείται θετικός: $f > 0 \Leftrightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle > 0$
$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}$

Έστω $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$: ΟΚΒ του E. Αν $\vec{x} \in E$, τότε
$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$ $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$
Αν $f = f^*$ είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός τότε ΦΘ $\Rightarrow$ υπάρχει ΟΚΒ του E στην οποία ο πίνακας του f είναι διαγώνιος: $f(\vec{e_i}) = \lambda_i \vec{e_i}$, $1 \leq i \leq n$. Τότε:

$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) =$
$= x_1\lambda_1\vec{e_1} + \dots + x_n\lambda_n\vec{e_n}$

Τότε: $\boxed{\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle} = \langle x_1\lambda_1\vec{e_1} + \dots + x_n\lambda_n\vec{e_n}, x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n} \rangle =$

$\boxed{= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}$ (*)

ΠΡΟΤΑΣΗ: $f \geq 0 \iff \forall$ ιδιοτιμή λ_i του f: $\lambda_i \geq$

$f > 0 \iff \forall$ ιδιοτιμή λ_i του f: $\lambda_i > 0$

$f > 0 \iff f \geq 0$ και f: ισομορφισμός

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (1) "$\Rightarrow$" Έστω ότι $f \geq 0$ ($f>0$). Έστω λ: ιδιοτιμή του f, τότε: $\exists\, \vec{x} \in E : \vec{x} \neq \vec{0} : f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \overset{>}{\geq} 0$, διότι $f \geq 0$ ($f > 0$) $\Rightarrow$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$)

$\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle \overset{>0}{\geq} 0 \quad \forall\, \vec{x} \in E$

"$\Leftarrow$" Αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι ≥ 0, τότε, $\forall\, \vec{x} \in E$ από τη σχέση (*) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \underset{>0}{\geq} 0$

Άρα $f \geq 0$ ($f > 0$)

(3) "$\Rightarrow$" Έστω ότι $f > 0$. Τότε $f \geq 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του f είναι > 0 και άρα ο f: ισομορφισμός [f: ισομορφισμός $\iff$ το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του f]

"$\Leftarrow$" Αν $f \geq 0$ και ο f: ισομορφισμός $\Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του f είναι ≥ 0 και δεν υπάρχει μηδενική ιδιοτιμή διότι ο f: ισομορφισμός $\Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του f είναι θετικές $\Rightarrow f > 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $f>0$, τότε υπάρχει ο f^{-1}. Είναι ο f^{-1}: αυτοπροσαρτημένος; Αν ναι, ισχύει ότι $f^{-1}>0$;

Έστω B: ΟκΒ του E και έστω $A = M_B^B(f)$.
Τότε επειδή $f = f^* \Rightarrow {}^tA = A$.
Επειδή ο f: ισομορφισμός $\Rightarrow A$: αντιστρέψιμος
και ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$

$\Rightarrow M_B^B(f^{-1}) = A^{-1}$ συμμετρικός $\Rightarrow f^{-1}$: αυτοπροσαρτημένος

Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του f, τότε $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ και τότε επειδή οι ιδιοτιμές του f^{-1} είναι οι: $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n \Rightarrow 1/\lambda_1 \dots 1/\lambda_n > 0 \Rightarrow f^{-1} > 0$

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, εφαρμόζουμε την ευτεθείσα θεωρία για τον αυτοπροσαρτημένο ενδομορφισμό.
$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Ορίζοντας ότι ο πίνακας A είναι θετικός, μη αρνητικός,
$A > 0 \Leftrightarrow$ ο f_A είναι θετικός, μη-αρνητικός, θα
$A \geq 0 \Leftrightarrow$ ο f_A είναι μη-αρνητικός, θα έχουμε:

- $A \geq 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n : \langle AX, X \rangle \geq 0$
$\Leftrightarrow$ οι ιδιοτιμές του A είναι ≥ 0

- $A > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 : \langle AX, X \rangle > 0$
$\Leftrightarrow$ οι ιδιοτιμές του A είναι > 0

$\rightarrow$

- $A > 0 \iff A \geq 0$ και $|A| \neq 0$

- $A > 0 \Rightarrow A^{-1}$: συμμετρικός και $A^{-1} > 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε, $\forall n \geq 1$, μια n-οστή ρίζα του A καλείται κάθε πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$: $B^n = A$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $A = {}^tA$ και $A \geq 0$
2. $\exists\, B \in M_n(\mathbb{R})$: $B^2 = A$ και ${}^tB = B$
3. $\exists\, C \in M_n(\mathbb{R})$: $A = {}^tC \cdot C$

① $A > 0$ και ${}^tA = A$
② $\exists\, B \in M_n(\mathbb{R})$: $B^2 = A$ και ${}^tB = B$ το $|B| \neq 0$
③ $\exists\, C$: $|C| \neq 0$ και $A = {}^tCC$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ① $\Rightarrow$ ② Επειδή ${}^tA = A \xrightarrow[\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}]{\text{ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ}}$

$\exists$ ορθογώνιος P: ${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$

Επειδή $A \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$

Θέτουμε: $B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \ \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP$

Τότε: $B^2 = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \ddots \ \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP \cdot P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \ddots \ \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP =$

$= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \ddots \ \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \ddots \ \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \cdot {}^tP =$

$= P \cdot \Delta \cdot {}^tP = A$

$\rightarrow$

car $${}^tB = {}^t({}^tP)\,{}^t\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot {}^tP = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP = B$$